Lois de probabilité et estimation

FX Jollois

BUT TC - 2ème année

Rappels de probabilités : Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé *a priori*
- **Univers de l'expérience** : ensemble des résultats possibles (noté Ω)
- **Résultat élémentaire** : résultat possible de l'expérience (noté ω)
- **Ensemble des parties** : ensemble constitué de tous les sous-ensembles possibles de Ω (noté $\mathcal{P}(\Omega)$)
- **Evènement** (aléatoire) : partie (sous-ensemble) de Ω (noté A)
  - On parle de *réalisation* lorsque l'évènement se produit (*i.e* le résultat ω appartient au sous-ensemble A)
  - $A = \Omega$ se réalise toujours
  - $A = \emptyset$ ne se réalise jamais
  - $A = \{\omega\}$ s'appelle donc un évènement élémentaire

Exemple simple

Lancer d'un dé à 6 faces (non pipé), avec un jeu où on doit faire un nombre pair

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{P}(\Omega)$: ensemble des 64 sous-ensembles possibles
  - $\emptyset$ et Ω
  - $\{1\}, \{2\}, \ldots$
  - $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots$
  - $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \ldots$
  - $\ldots$
- $A = \{2, 4, 6\}$

Rappels de probabilités : Evènements

- A : évènement constitué des éléments de Ω inclus dans A

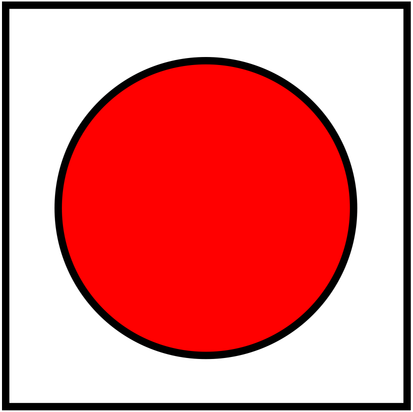


Figure 1: Ensemble A

Rappels de probabilités : Evènements

- **Complémentaire** de A : évènement constitué des éléments de Ω non inclus dans A
  - $\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$

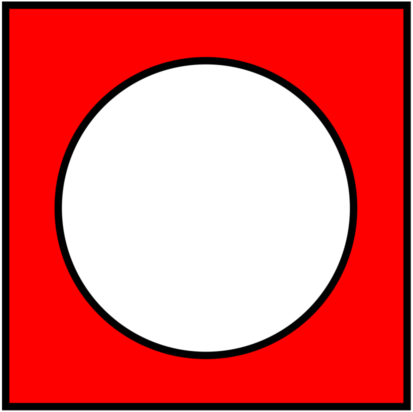


Figure 2: Complémentaire de A

Rappels de probabilités : Evènements

- **Union** de A et B : évènement constitué des éléments de A et des éléments de B (ou aux deux donc)
  - $A \cup B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$

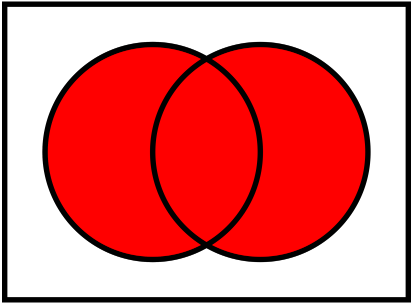


Figure 3: Union entre A et B

Rappels de probabilités : Evènements

- **Intersection** de A et B : événement constitué des éléments de Ω étant à la fois dans A et dans B
  - $A \cap B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$

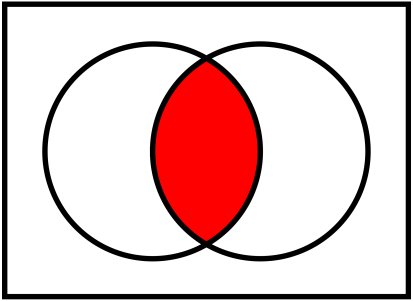


Figure 4: Intersection entre A et B

Rappels de probabilités : Evènements

- **Différence** entre A et B (non symétrique) : ensemble constitué des éléments de A n'étant pas dans B
  - $A \setminus B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}$

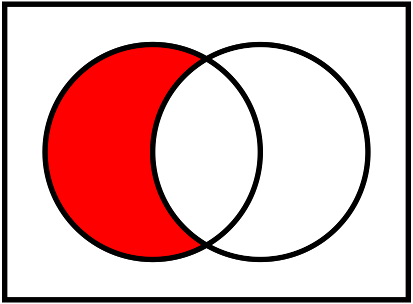


Figure 5: Différence entre A et B

Rappels de probabilités : Evènements

- **Inclusion** : A est inclus dans B si tous les éléments de A sont dans B
  - $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \implies \omega \in B)$

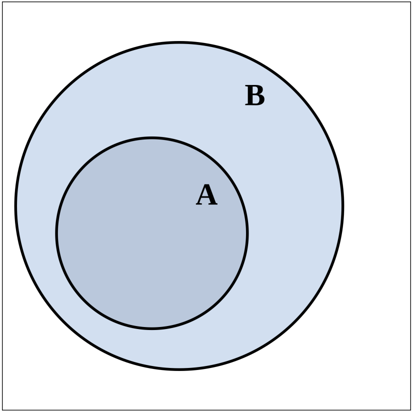


Figure 6: Inclusion de A dans B

Rappels de probabilités : Evènements

- **Disjonction** (ou incompatibilité) : A et B sont disjoints s'il n'y aucun élément commun entre les deux
  - A et B disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

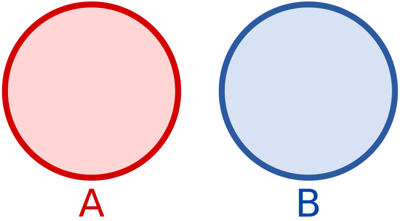


Figure 7: Disjonction entre A et B

Rappels de probabilités : Evènements

Système complet d'évènements

$(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ constitue un système complet s'ils forment une **partition** de Ω

- Ils sont 2 à 2 incompatibles : $\forall p \neq q, A_p \cap A_q = \emptyset$
- Leur réunion est égale à Ω : $\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega$

Rappels de probabilités

Probabilité : fonction permettant de mesurer la chance (ou le risque) de réalisation d'un évènement

Quelques opérations :

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

Rappels de probabilités

- Probabilité conditionnelle de A sachant B

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Indépendance de 2 évènements A et B
  - 2 évènements disjoints ne sont pas considérés comme indépendant

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(B)$$

- Théorème de Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire

Mesure d'un phénomène (*variable*) dont le résultat est déterminé par une expérience *aléatoire* (*i.e.* dépendant du hasard)

- Exemples classiques : Pile/Face, Lancer de dé, Température, ...
- Chaque résultat d'une expérience : **issue**
- Ensemble de toutes les issues possibles : **univers des possibles** Ω
- Sous-ensemble de Ω : **évènement**
  - Si ensemble à une seule issue *évènement élémentaire*
- Possibilité d'associer une valeur réelle à chaque issue
  - Notion de gain par exemple

Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Une **variable aléatoire** (ou *v.a.*) $\mathbf{X}$ est une fonction définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$, à laquelle on associe une **loi de probabilité** (ou *distribution de probabilité*) dont la masse totale est égale à 1

- V.a. *continue* si les valeurs de X sont quantitatives continues
- V.a. *discrète* si le nombre de résultats est faible (ou si c'est qualitatif)

Fonction de répartition

Soit $\mathbf{X}$ une *v.a.* prenant des valeurs x réelles ou discrètes.
La *fonction de répartition* F_X de la v.a. est la fonction qui associe une probabilité $P(X \leq x)$ à tout x.

Variable aléatoire

Fonction de masse

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x_i discrètes.
La *fonction de masse* de la v.a. associe une probabilité $P(X = x_i)$ à chaque résultat élémentaire x_i

Densité de probabilité

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles.
La *fonction de densité* permet de calculer la probabilité d'appartenance à un domaine $P(a \leq X \leq b)$ (c'est la dérivée de la fonction de répartition).

Exemple de cas discret

On lance un dé (à 6 faces), et on calcule notre gain avec

- $+1$ si c'est pair
- -2 si c'est ≤ 3
- $+5$ si c'est 2

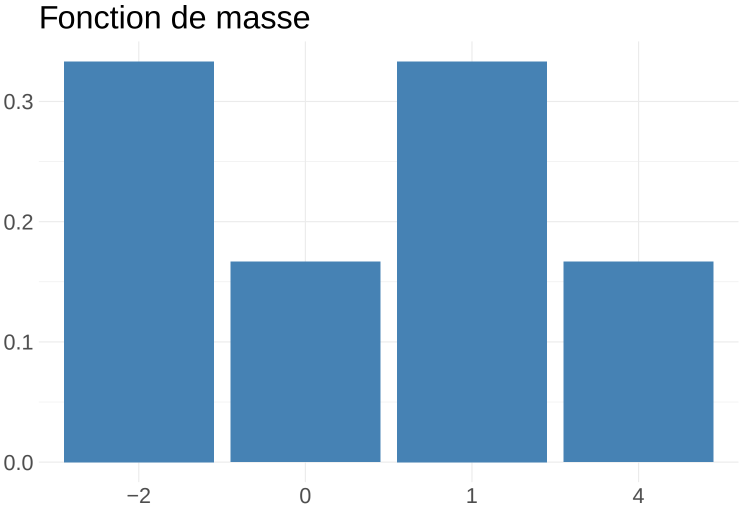
x	1	2	3	4	5	6
gain	-2	4	-2	1	0	1

A noter

- V.a. **X** *discrète* : gain d'un lancer
- Ω : $1, \ldots, 6$
- **Issues** : $-2, 0, 1, 4$
- Loi de probabilité :

Exemple de cas discret

gain	-2	0	1	4
p	0.3333	0.1667	0.3333	0.1667



Cas discret

- **Loi uniforme discrète** (résultats équi-probables)
- **Loi de Bernouilli**
- **Loi Binomiale**
- **Loi de Poisson**

Loi uniforme discrète

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs k discrètes (avec $k = 1, \ldots, n$).
X suit une **loi uniforme discrète** si pour chaque k, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

Exemple

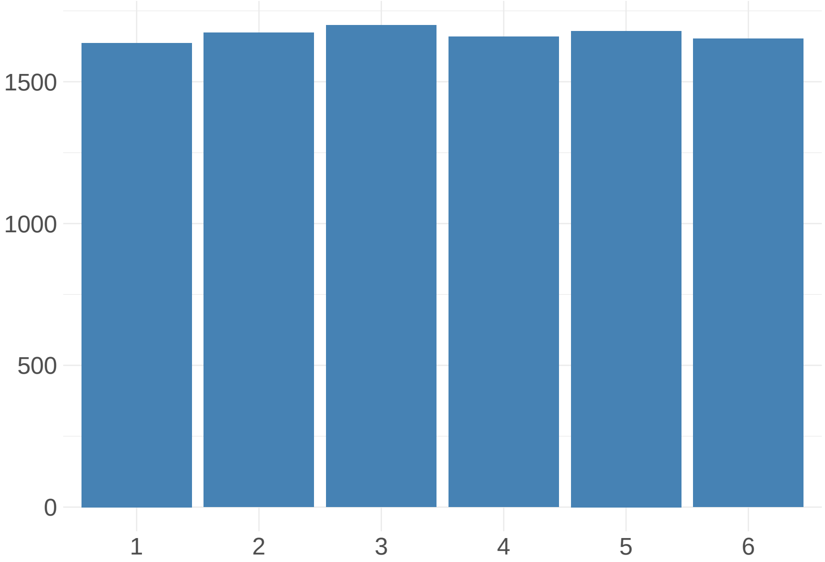
Dé à 6 faces (non pipé) $\rightarrow P(X = k) = \frac{1}{6}$ (avec $k = 1, \ldots, 6$).

Espérance et variance

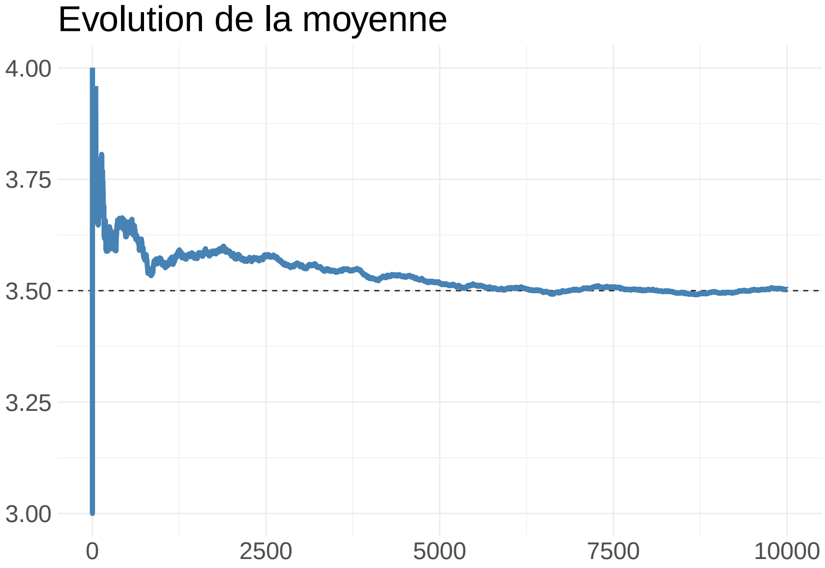
$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Loi uniforme discrète

→ Simulation avec 6 valeurs possibles, et 10^4 tirages.



Loi uniforme discrète



Loi uniforme discrète - *exercice*

Questions

On dispose de 10 boules numérotées de 1 à 10 dans une urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer la boule 5 ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 2 fois de suite la boule 5 ? trois fois ?
3. Si je tire 100 fois une boule (avec remise donc à chaque fois), quelle est valeur moyenne puis-je espérer avoir ?

Loi uniforme discrète - *exercice*

Réponses

Soit **X** une v.a. de loi uniforme discrète, à valeur entre 1 et 10.

1. $P(X = 5) = \frac{1}{10}$
2. $P(X_1 = 5 \text{ et } X_2 = 5) = P(X_1 = 5)P(X_2 = 5) = \frac{1}{100}$ (car idépendance entre les 2 évènements)

- Il y a donc 1 chance sur mille d'avoir 3 cinq d'affilés

1. $E(X) = \frac{n+1}{2} = 50.5$

Loi de Bernouilli

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant deux valeurs 0 ou 1
X suit une **loi de Bernouilli** si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$.

Exemple

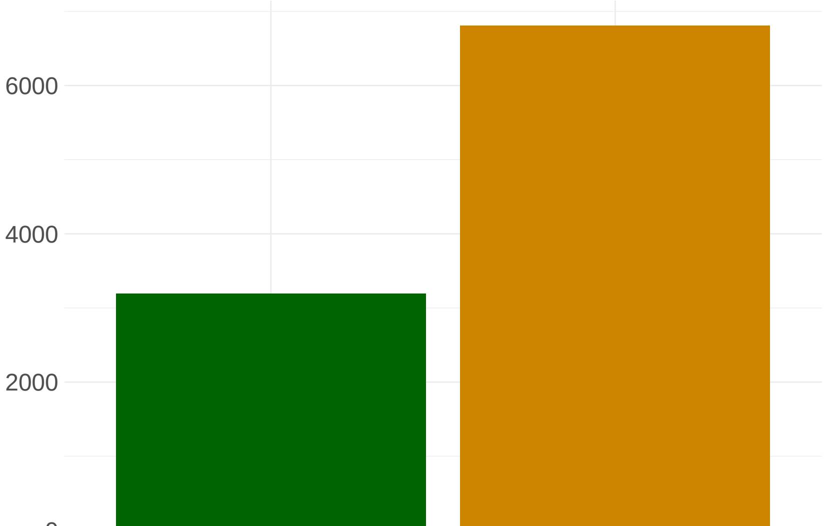
Pile ou face avec une pièce équilibrée

Espérance et Variance

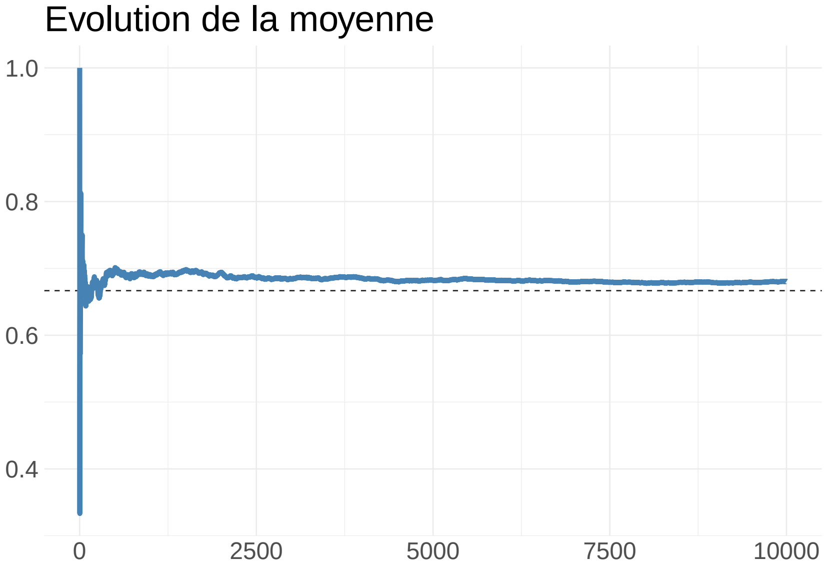
$$E(X) = p \text{ et } V(X) = pq$$

Loi de Bernouilli

→ Simulation avec une urne avec 100 boules oranges et 50 boules vertes. On considère qu'on veut des boules oranges, donc $P(X=1)=\frac{100}{150}$. On fait toujours 10^4 tirages, avec remise ici.



Loi de Bernouilli



Loi de Bernouilli - *exercice*

Questions

On est en présence d'une assemblée de 250 personnes, dont 40 gauchers.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne soit gauchère ?
2. A l'inverse, quelle est la probabilité qu'une personne soit droitière ?

Loi de Bernouilli - *exercice*

Réponses

Soit **X** une v.a. de loi de Bernouilli, valant 1 si la personne est gauchère, 0 sinon.

1. $P(X = 1) = \frac{40}{250} = .16$
2. $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - .16 = .84$ (complémentaire)

Loi Binomiale

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant les valeurs 0 (avec une probabilité p) ou 1 (avec une probabilité $1-p$), et n le nombre de tirages réalisés.
X suit une **loi Binomiale** lorsque $P(X=k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$, somme de n v.a. indépendants de loi de Bernouilli.
$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se nomme le coefficient binomial, et représente le nombre d'ensembles à k éléments qu'on peut obtenir dans l'ensemble des n éléments.

Exemple

Avec 100 tirages à pile ou face, combien de fois on aura pile ?

Espérance et Variance

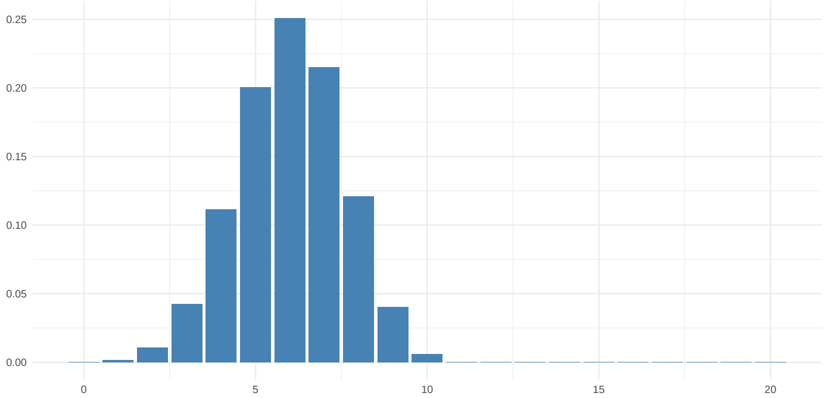
$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

Loi Binomiale

Fonction de masse

$$P(X = k) = f(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

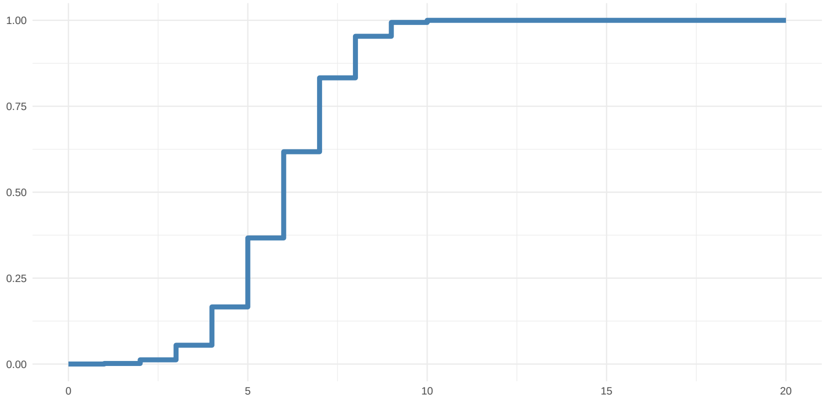
Exemple avec $n = 10$ et $p = .6$



Loi Binomiale

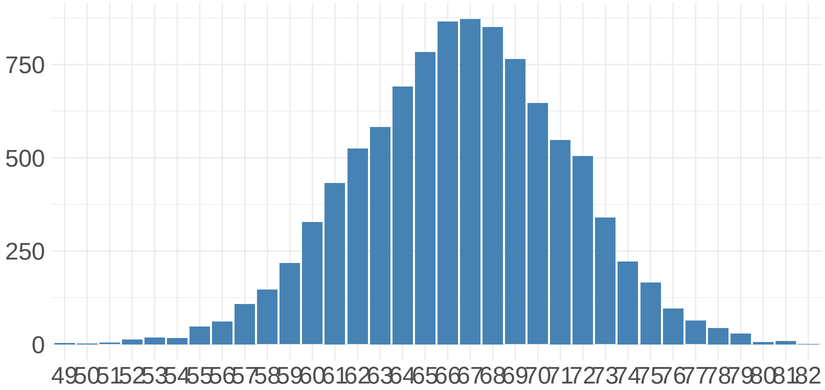
Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} f(k) & \text{pour } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

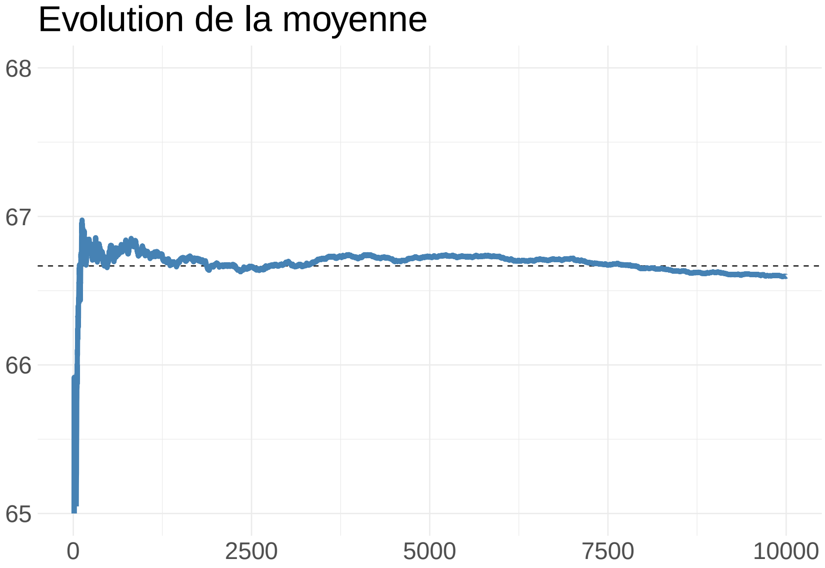


Loi Binomiale

$\rightarrow$ Simulation avec notre urne avec 100 boules oranges et 50 boules vertes. Chaque essai comportera 100 tirages avec remise. On fait toujours 10^4 essais. On cherche à savoir combien on aura de boules oranges dans ces 100 tirages.



Loi Binomiale



Loi Binomiale - *exercice*

Questions

Supposons que nous avons formé 100 groupes de 2000 personnes, avec la même proportion de gaucher (16%) que précédemment.

1. Si je choisis une personne de chaque groupe, combien puis-je espérer avoir de gauchers au final ?
2. Quelle est la probabilité de n'avoir aucun gaucher ? Et 100 gauchers ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir 20 gauchers ?

Loi Binomiale

Réponses

Soit **X** une v.a. de loi Binomiale, avec $p = .16$ et $n = 100$

1. $E(X) = np = 100 * .16 = 16$
2. $P(X = 0) = C_0^{100}.16^0.84^{100} = .84^{100} < 0.0001$ (très très faible) et $P(X = 100) = .16^{100} < 0.0001$ (aussi très très faible)
3. $P(X = 20) = C_20^{100}.16^20.84^{80} = 0.0567$

Loi de Poisson

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs k discrètes (avec $k = 1, 2, \ldots$).
X suit une **loi de Poisson** $Pois(\lambda)$ si pour chaque k,
$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ où

- e est la base de l'exponentielle
- λ représente le nombre moyen d'occurences dans un intervalle de temps fixé

Exemple

Nombre de personnes à l'arrêt d'un bus après une certaine durée

Espérance et Variance

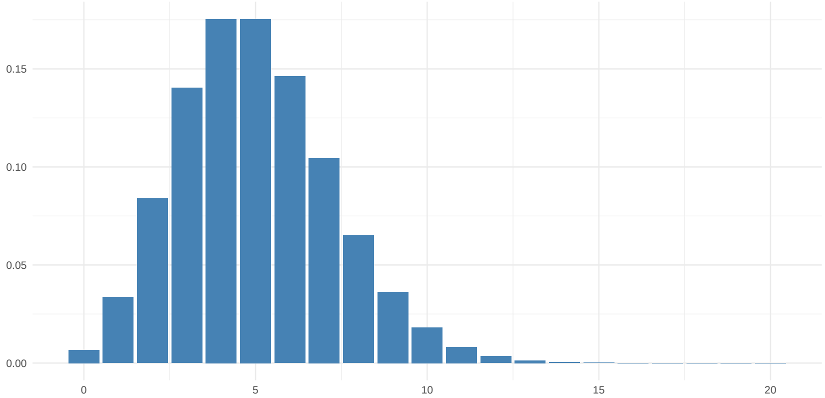
$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

Loi de Poisson

Fonction de masse

$$P(X = k) = f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

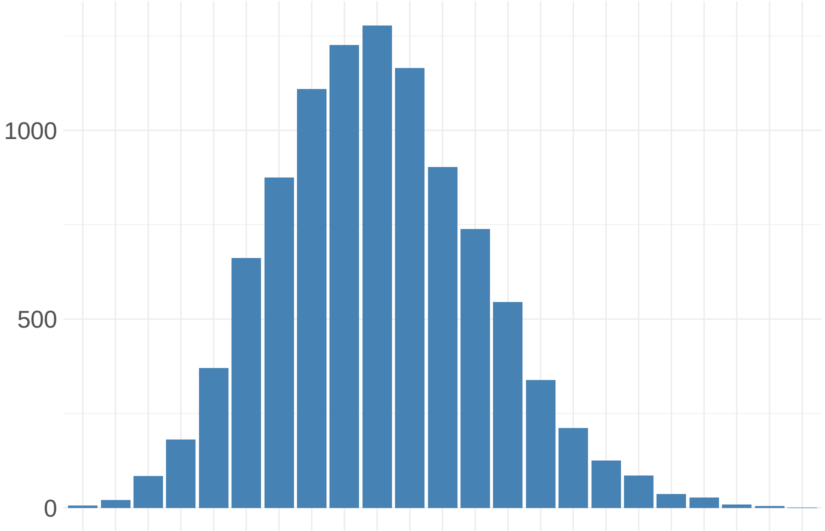
Exemple avec $\lambda = 5$



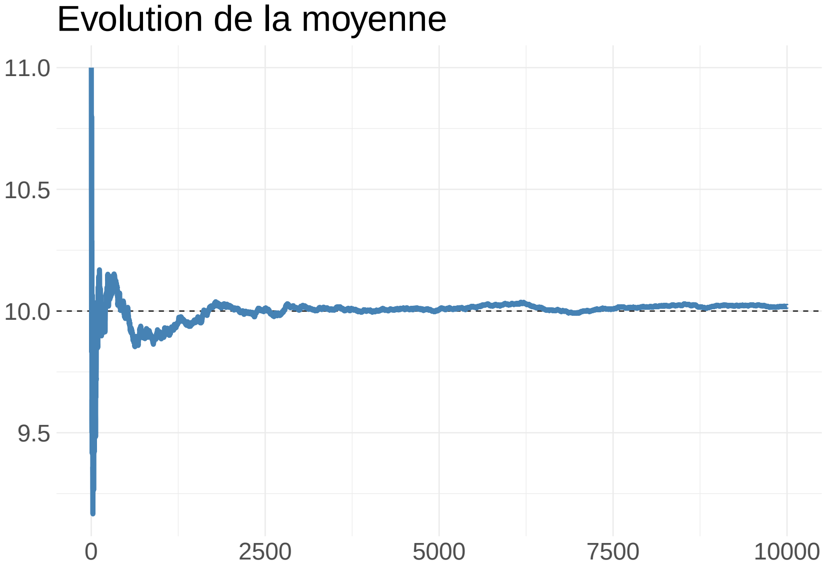
Fonction de répartition

Loi de Poisson

→ Simulation en considérant un arrêt de bus. On considère que 2 personnes viennent toutes les minutes. On étudie le nombre de personnes sur une durée de 5 minutes. On choisit donc $\lambda = 10$.



Loi de Poisson



Cas continu

- Loi uniforme
- Loi Normale

Loi uniforme continue

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles dans $[a; b]$.
X suit une **loi uniforme continue** $U(a, b)$ si tous les intervalles de même longueur ont la même probabilité

Exemple

Pas réellement de cas dans la vie de tous les jours

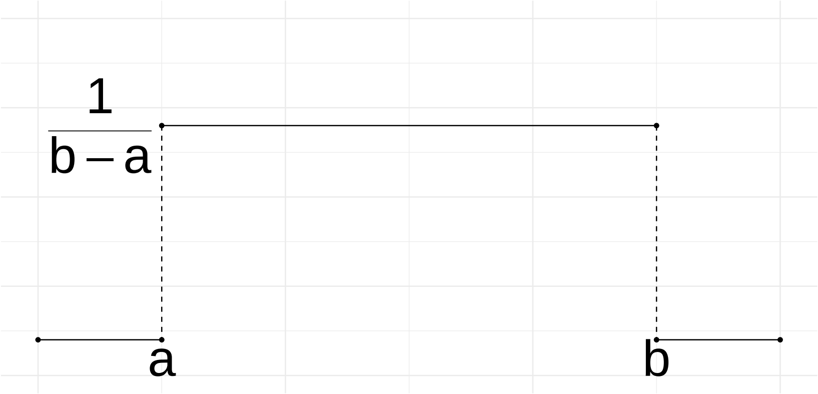
Espérance, Variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi uniforme continue

Densité de probabilité

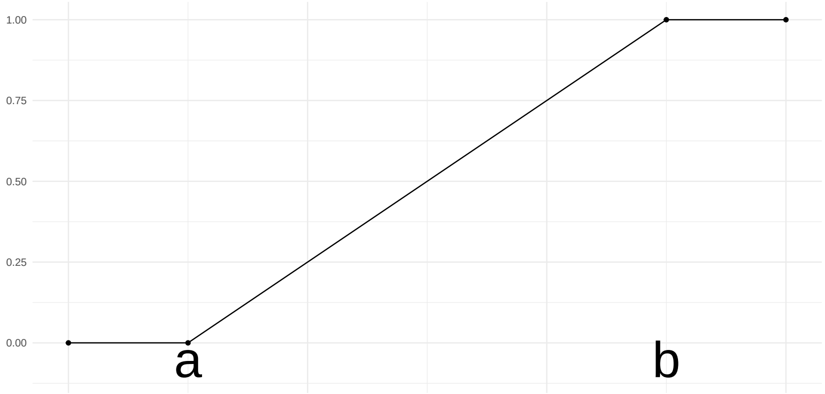
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Loi uniforme continue

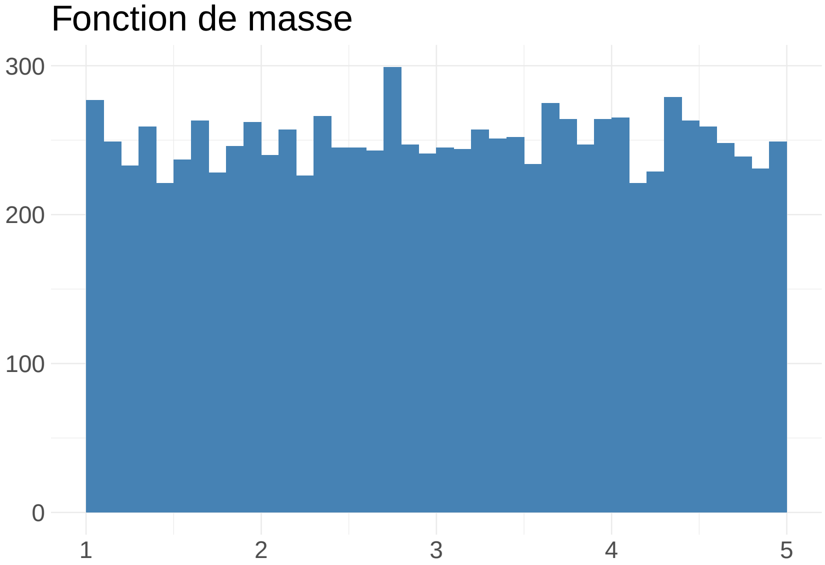
Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } x \in [a; b] \\ 1 & \text{pour } x > b \end{cases}$$

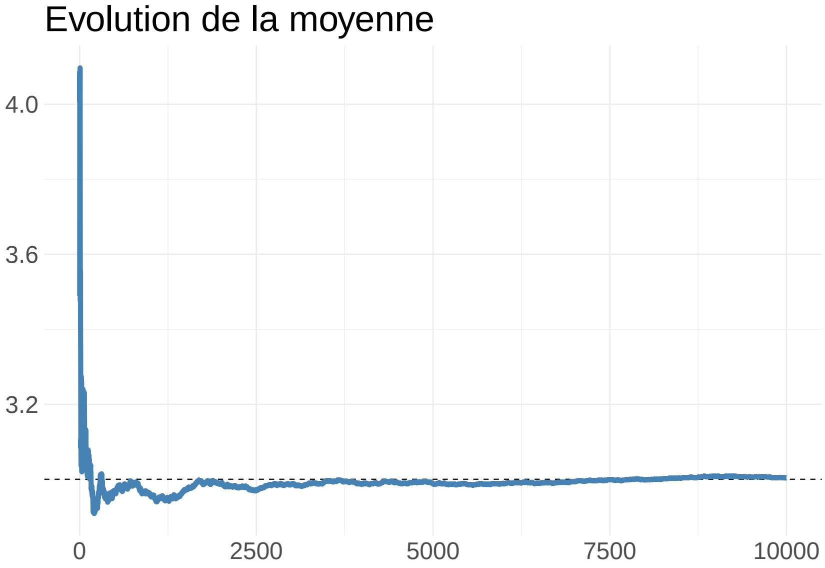


Loi uniforme continue

→ Simulation sur l'intervalle $[1; 5]$



Loi uniforme continue



Loi Normale

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles.
X suit une **loi Normale** $N(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2.

Exemple

Mesure de la taille d'une population

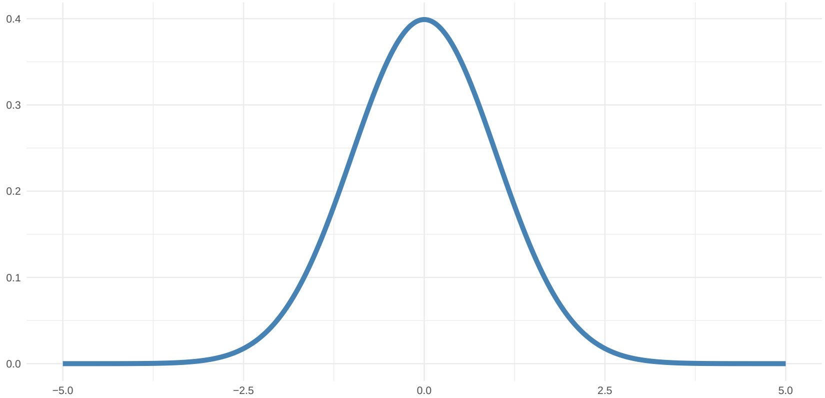
Espérance et Variance

$$E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2$$

Loi Normale

Densité de probabilité

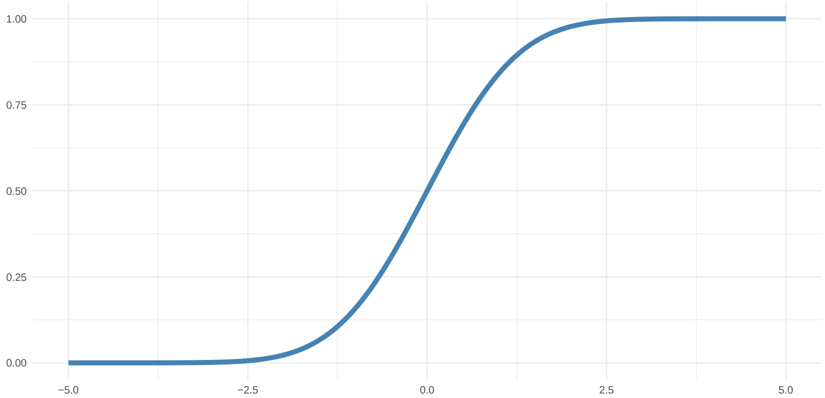
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Loi Normale

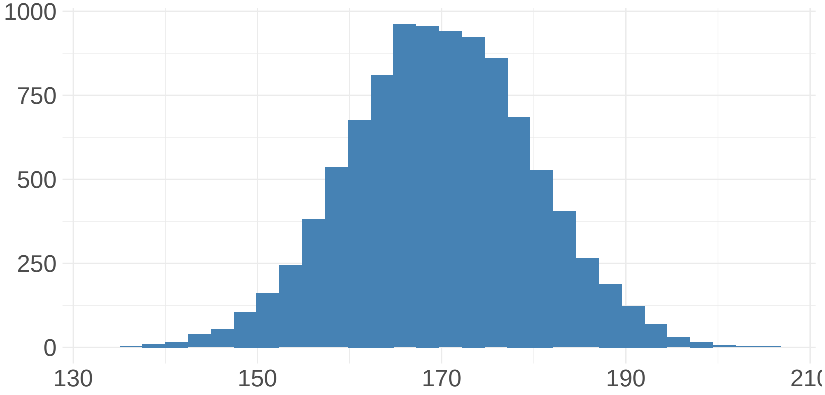
Fonction de répartition

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

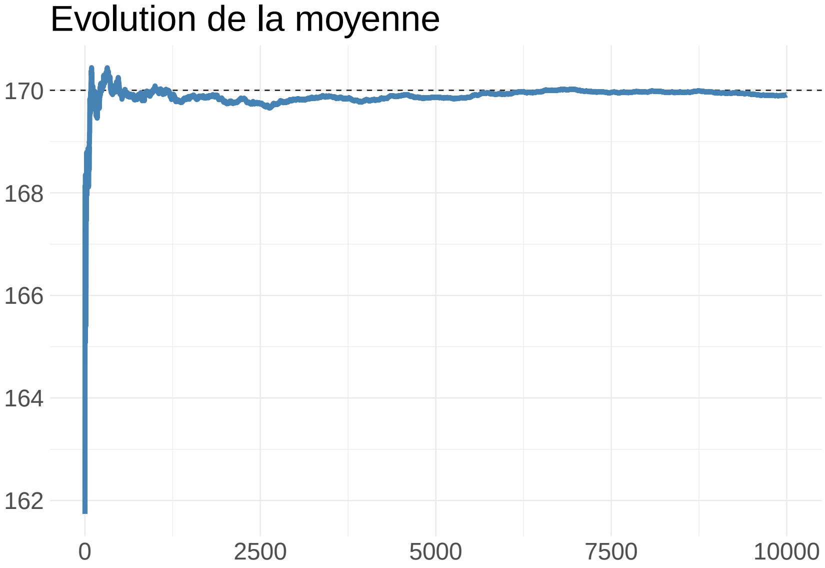


Loi Normale

→ Simulation d'une loi Normale de moyenne $\mu = 170$ et d'écart-type 10



Loi Normale



Exercice

Plus grand nombre tiré

On joue à un jeu avec deux dés (non pipés), pendant lequel on note le plus grand chiffre obtenu. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?

Solution

Plus grand nombre tiré

On définit Ω avec :

$$\Omega = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\ldots\}$$

On peut donc faire le tableau suivant, avec en ligne les résultats du dé A et en colonnes ceux du dé B. Chaque cellule représente donc le plus grand des 2 chiffres obtenus.

	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5	b=6
a=1	1	2	3	4	5	6
a=2	2	2	3	4	5	6
a=3	3	3	3	4	5	6
a=4	4	4	4	4	5	6
a=5	5	5	5	5	5	6
a=6	6	6	6	6	6	6

Solution

Plus grand nombre tiré

On obtient ainsi la loi de probabilité suivante :

Plus grand	Nb	Px	P
1	1	1/36	0.03
2	3	3/36	0.08
3	5	5/36	0.14
4	7	7/36	0.19
5	9	9/36	0.25
6	11	11/36	0.31